$Y_1, Y_2 \le V$

$Y_1 + Y_2 \le V$

$Y_1 \cap Y_2 \le V$

$Y_1 + Y_2$;;; Y_1 ή Y_2

$\dim(Y_1+Y_2) + \dim(Y_1 \cap Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2$

Βάση της $Y_1 \cap Y_2 \sim$ Επέκταση σε βάση του $Y_1 + Y_2$

$Y_1 \geq (Y_1 \cap Y_2)$

$Y_2 \geq (Y_1 \cap Y_2)$

Ένα άθροισμα υποχώρων $Y_1 + Y_2$ θα καλείται ευθύ αν $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ κ' τότε γράφουμε $Y_1 \oplus Y_2$.

Αν έχουμε $Y_1 \le V_1$, τότε $\exists$ ένας άλλος $Y_2 \le V$ ο οποίος τον "συμπληρώνει" δηλαδή $Y_1 \oplus Y_2 = V$. Ο Y_2 καλείται ένα ευθύ συμπλήρωμα του Y_1

$Y_1 \oplus Y_2 \Leftrightarrow \dim(Y_1 \cap Y_2) = 0 \Leftrightarrow Y_1 \cap Y_2 = \{\vec{0}\}$

Θέμα εξετάσεων

Στον $\mathbb{R}^4$ δίνονται οι υποχώροι $Y_1 = \{(x,y,z,w) \mid x+y-z+2w=0\}$

$Y_2 = \{(a, a+b, 2a+3b, a+4b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

Να βρεθεί $Y_1 \cap Y_2$, ένα συμπλήρωμα του Y_2 κ' ένα συμπλήρωμα της $Y_1 \cap Y_2$

Λύση: Να βρεθούν βάσεις του Y_1 κ' Y_2

Στον Y_1: $z = x+y+2w$

Τυχαίο του Y_1: $(x, y, x+y+2w, w) = x(1,0,1,0) + y(0,1,1,0) + w(0,0,2,1)$

τα $(1,0,1,0), (0,1,1,0) (0,0,2,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

$Y_1 = \langle (1,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,2,1) \rangle$

Στον Y_2: $(a, a+b, 3a+3b, a+4b) = a(1,2,3,1) + b(0,1,3,4)$

$Y_2 = \langle (1,2,3,1), (0,1,3,4) \rangle$

$\dim Y_1 = 3 \quad \dim Y_2 = 2$

Άρα $Y_1 \cap Y_2 \neq \{\vec{0}\}$

$Y_1 \cap Y_2$

Τυχαίο $(x,y,z,w) \in Y_1 \cap Y_2 \Leftrightarrow (x,y,z,w) \in Y_1$ κ' $(x,y,z,w) \in Y_2$

$\Downarrow$

$$\alpha(1,0,1,0) + \beta(0,1,1,0) + \gamma(0,0,2,1) = \kappa(1,1,2,1) + \lambda(0,1,3,4)$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \kappa \\ &\beta = \kappa + \lambda \\ &\alpha + \beta + 2\gamma = 2\kappa + 3\lambda \\ &\gamma = \kappa + 4\lambda \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &\cancel{\kappa + \kappa} + \lambda + 2\kappa + 8\lambda = \cancel{2\kappa} + 3\lambda \\ &2\kappa + 6\lambda = 0 \Rightarrow \kappa = -3\lambda. \end{aligned}$$

Το τυχαίο της $Y_1 \cap Y_2$ δίνεται από $-3\lambda(1,1,2,1) + \lambda(0,1,3,4) =$

$(-3\lambda, -3\lambda + \lambda, -6\lambda + 3\lambda, -3\lambda + 4\lambda) = \lambda(-3,-2,-3,1)$

$Y_1 \cap Y_2 = \langle(-3,-2,-3,1)\rangle = \langle(3,2,3,-1)\rangle$

$\dim Y_1 \cap Y_2 = 1$

$\dim(Y_1 + Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(Y_1 \cap Y_2) = 3 + 2 - 1$

$\dim(Y_1 + Y_2) = 4 \Leftrightarrow Y_1 + Y_2 = \mathbb{R}^4$ κ' δεν είναι ευθύ

Έστω $Y_2' \leq \mathbb{R}^4$ ώστε $Y_2 \oplus Y_2' = \mathbb{R}^4$

$\dim Y_2' = 4 - 2 = 2$

$\{(x,y,z,w) \mid x + y - z + 2w = 0\}$

$(a, a+b, 2a+3b, a+4b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ είναι $Y_1 \cap Y_2$, ένα συμπλήρωμα του Y_2

συμπλήρωμα της $Y_1 \cap Y_2$

$Y_2' = \langle(0,1,0,0), (0,0,1,0)\rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

rank = 4 γρ. ανεξ.

Έστω $Y \leq \mathbb{R}^4$ ώστε $(Y_1 \cap Y_2) \oplus Y = \mathbb{R}^4$ με $Y = \langle(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\rangle$

Γραμμικές Απεικονίσεις

π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad$ δχ $\quad$ δχ

$f(x) = x^2$

$f(x+y) \neq f(x) + f(y)$

$(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$

$f(x) = ax$

$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$

$f(rx) = arx = rax = rf(x)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$\quad$ δχ $\quad$ δχ

$g(x) = (x, x^2)$

$g(x+y) \neq g(x) + g(y)$

$g'(x) = (ax, bx)$

$g'(x+y) = (a(x+y), b(x+y)) = (ax+ay, bx+by) = (ax, bx) + (ay, by) =$
$= g'(x) + g'(y)$

$g'(rx) = rg'(x)$

Ορισμός: Έστω $(V, \oplus, \odot)$ κ' $(W, \oplus', \odot')$ δύο δχ με πιθανώς διαφορετικές πράξεις.
Μια απεικόνιση $T: V \to W$ θα καλείται γραμμική, αν ισχύει:

$T(w \oplus v) = T(w) \oplus' T(v)$

$T(r \odot v) = r \odot' T(w)$

π.χ. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T(x, y, z) = (x+y, y+z)$ είναι γραμμική

$T((x,y,z) + (x',y',z')) = (x+x'+y+y', y+y'+z+z') =$
$T(x,y,z) + T(x',y',z')$

κ' $T(r(x,y,z)) = T(rx, ry, rz) = (rx+ry, ry+rz) = r(x+y, y+z) = rT(x,y,z)$

Π.Χ. $T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$

$T(ax^2+\beta x+\gamma) = (a,\beta,\gamma)$

$T((ax^2+\beta x+\gamma)+(a'x^2+\beta' x+\gamma')) = T((a+a')x^2+(\beta+\beta')x+(\gamma+\gamma')) =$

$=(a+a', \beta+\beta', \gamma+\gamma') = (a,\beta,\gamma)+(a',\beta',\gamma') = T(ax^2+\beta x+\gamma)+T(ax^2+\beta x+\gamma$

$T(r(ax^2+\beta x+\gamma)) = T(rax^2+r\beta x+r\gamma) = (ra, r\beta, r\gamma) = r(a,\beta,\gamma) = rT(ax^2+\beta x+\gamma)$

Π.Χ. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ με τύπο

$$T(x,y,z) = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} a_1&a_2&a_3\\ \beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}}_{2\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{3\times 1}\Big)^t = \begin{pmatrix} a_1x+a_2y+a_3z \\ \beta_1x+\beta_2y+\beta_3z\end{pmatrix}^t = (a_1x+a_2y+a_3z,\ \beta_1x+\beta_2y+\beta_3z)$$

2×1

Πρέπει $T((x,y,z)+(x',y',z')) = T(x,y,z)+T(x',y',z')$

$T(r(x,y,z)) = rT(x,y,z)$

$$= \left[A\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)\right]^t = \left[A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right]^t = \left[A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]^t+\left[A\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right]^t =$$

$= T(x,y,z)+T(x',y',z')$

$T: \underset{\text{π.ο}}{V}\to \underset{\text{π.τ}}{W}$ γραμμική απεικόνιση

$T(V) = \{T(v) \mid v\in V\}$ Εικόνα της T

Η T είναι επί όταν $W = T(V)$ ή

$\forall w\in W\ \exists v\in V$ ώστε $T(v)=w$ $\quad T$ 1-1 όταν $\forall v_1\neq v_2 \Rightarrow T(v_1)\neq T(v_2)$

Ορισμός: Έστω $T: V\to W$ γρ. απεικόνιση. Με Ker (T) συμβολίζουμε όλα τα στοιχεία του V τα οποία απεικονίζονται στο $\bar{0}$ του W.
Το σύνολο αυτό καλείται πυρήνας της T.

$\ker T = \{v\in V \mid T(v)=\bar{0}\}$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $T: V \to W$ γραμμ. απεικ.

(i) $T(V) \leq W$

(ii) $\ker T \leq V$

(iii) T 1-1 $\iff \ker T = \{\bar{0}\}$

<u>Απόδειξη</u>: (i) Θέλουμε $T(V) \leq W$

Έστω $T(v_1), T(v_2) \in T(V) \Rightarrow T(v_1)+T(v_2) \overset{\gamma\rho.}{=} T(v_1+v_2) \in T(V)$

$r\,T(v) \overset{\gamma\rho}{=} T(rv) \in T(V)$.

(ii) Θέλουμε $\ker T \leq V$. Έστω $v_1, v_2 \in \ker T \Rightarrow T(v_1) = \bar{0} = T(v_2)$

$T(v_1+v_2) \overset{\gamma\rho}{=} T(v_1) + T(v_2) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow v_1 + v_2 \in \ker T$

Έστω $v \in \ker T \Rightarrow T(rv) \overset{\gamma\rho}{=} r\,T(v) = r\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow rv \in \ker T$

$\ker T \leq V$

(iii) Έστω T είναι 1-1. Θέλουμε $\ker T = \{\bar{0}\}$.

Έστω $v \neq \bar{0} \in \ker T$

$T(v) = T(\bar{0}) \overset{T\ 1-1}{\Longrightarrow} v = \bar{0}$, άτοπο.

Άρα $\ker T = \{\bar{0}\}$

Έστω $\ker T = \{\bar{0}\}$, θέλουμε T 1-1

$T(\bar{0}) = T(0v) \overset{\gamma\rho}{=} 0\,T(v) = \bar{0}$

Έστω $v_1 \neq v_2$ κ' $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow T(v_1) - T(v_2) = \bar{0}$

$T(v_1 - v_2) = \bar{0} \Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker T$.

Αλλά $\ker T = \{\bar{0}\} \Rightarrow v_1 - v_2 = \bar{0} \Rightarrow v_1 = v_2$